Módulo 2

OTIMIZAÇÃO DE REDES

OTIMIZAÇÃO DE REDES DE TRANSPORTE

REDES - Conceitos

Para avaliação de REDES DE TRANSPORTE utiliza-se uma estrutura gráfica denominada GRAFO, composta por um conjunto X de elementos (nós) e um conjunto A de pares de vértices (arcos).

$$G = (X,A)$$

REDES - Conceitos

Uma REDE é um GRAFO com um ou mais Valores (α) associados a cada ARCO e algumas vezes ao NÓ.

$$R = (X, A, \alpha)$$

Os principais valores associados aos arcos $A(i,j)$ são:

Capacidade de fluxo (limitação do arco): $U(i,j)$

Custo, distância ou tempo associada ao arco: $C(i,j)$

Fluxo do arco: $f(i,j)$

REDES - Conceitos

Os Problemas de Otimização podem ser modelados como:

- ✓ **Minimização de Redes (Árvore Mínima).**
- ✓ **Caminho Mínimo**
- ✓ **Fluxo Máximo**
- ✓ **Custo Mínimo**
- ✓ **Roteamento**

REDES - Conceitos - Minimização de Redes

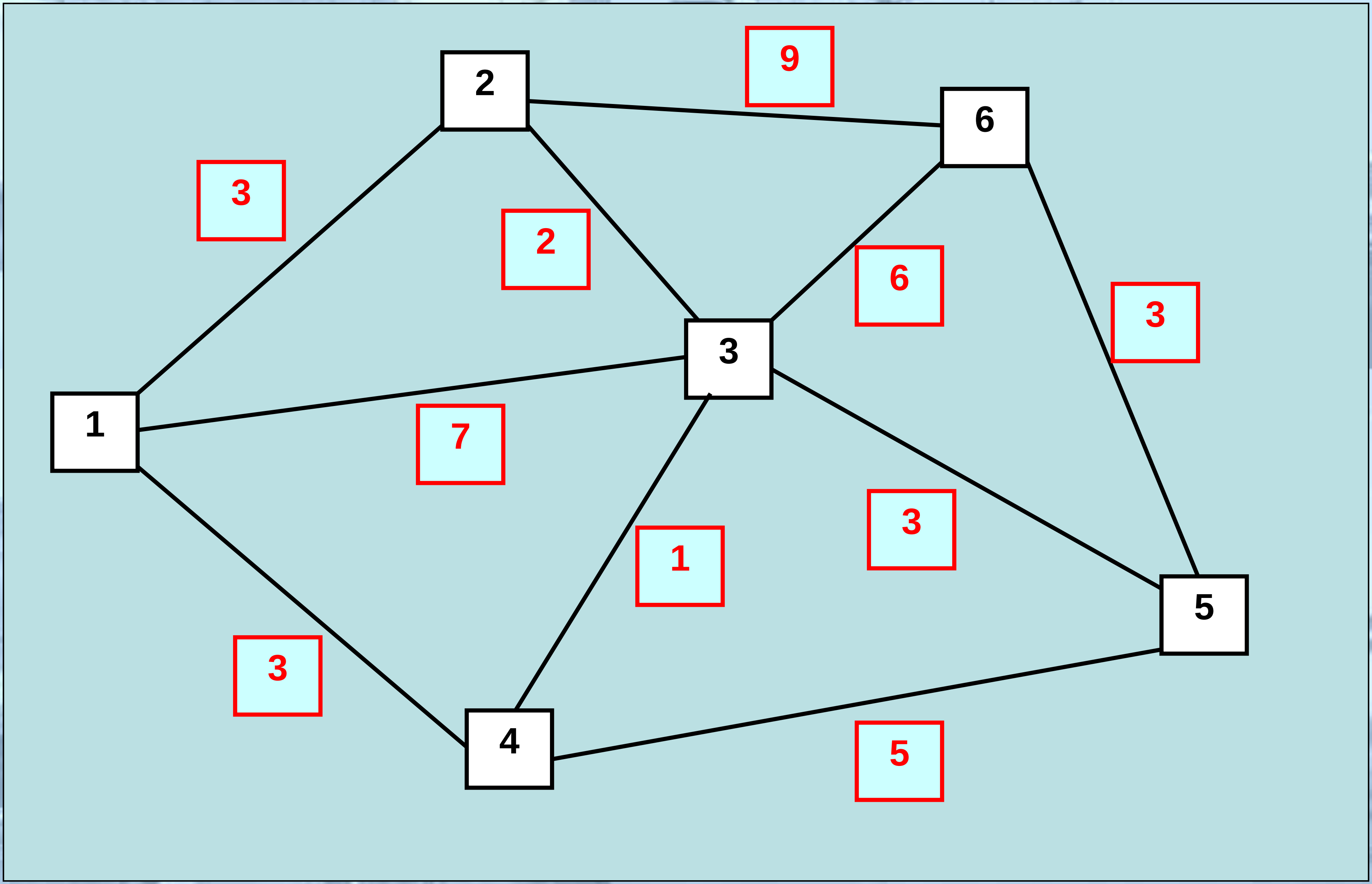
São aqueles onde procura-se **interligar pontos** de uma rede de forma que a **soma total dos valores dos arcos** utilizados para ligá-los seja a **menor possível**.

Principais Algoritmos utilizados para o cálculo:

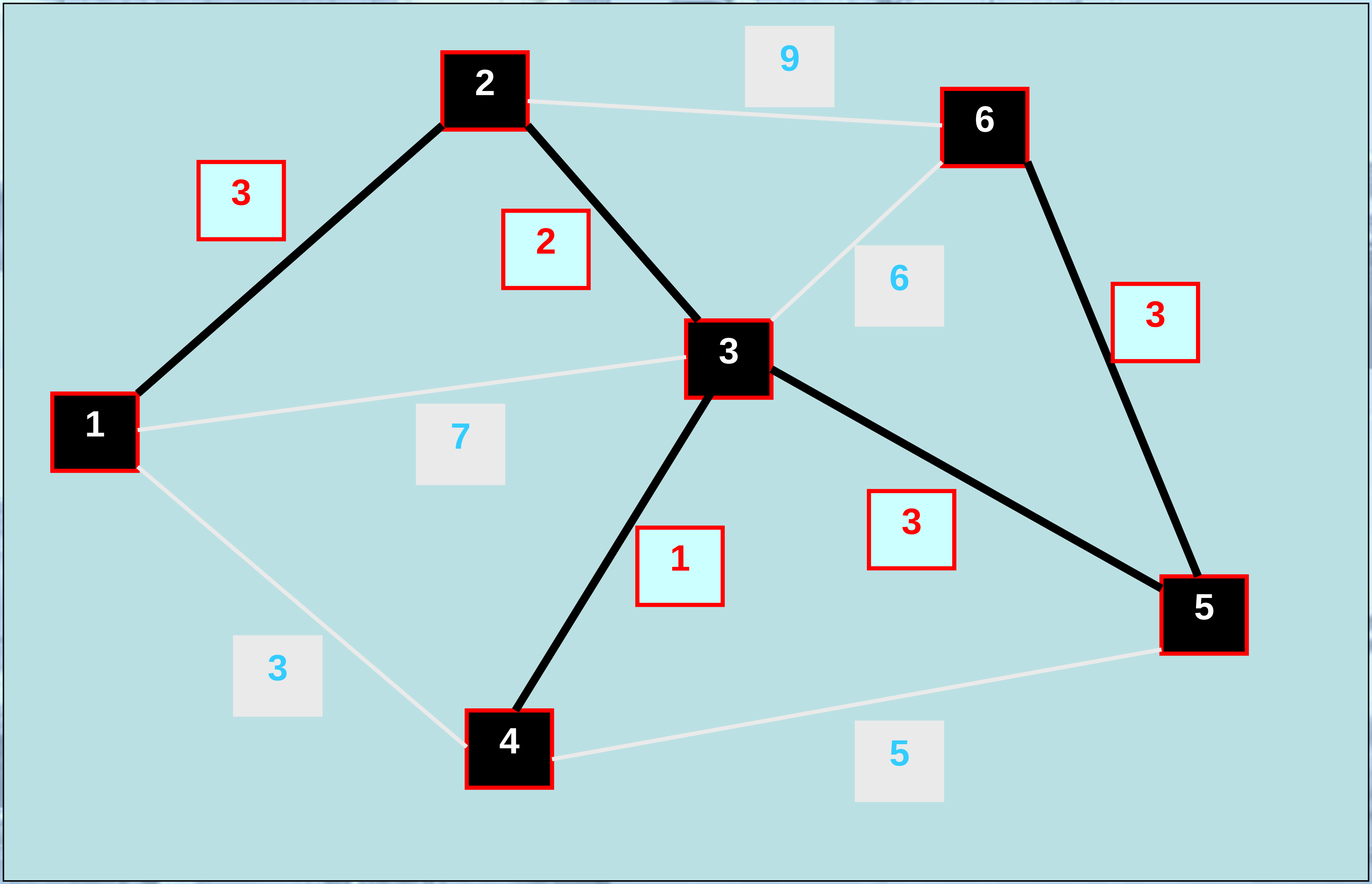
Kruskal

PRIM

REDES - Conceitos - Exemplo de Minimização de Redes



REDES - Conceitos - Exemplo de Minimização de Redes



REDES - Conceitos - Caminho Mínimo

Compreendem a determinação do caminho ou rota de menor tamanho (distância, tempo ou custo) entre dois nós de uma rede.

Principais Algoritmos utilizados para o cálculo:

Dijkstra

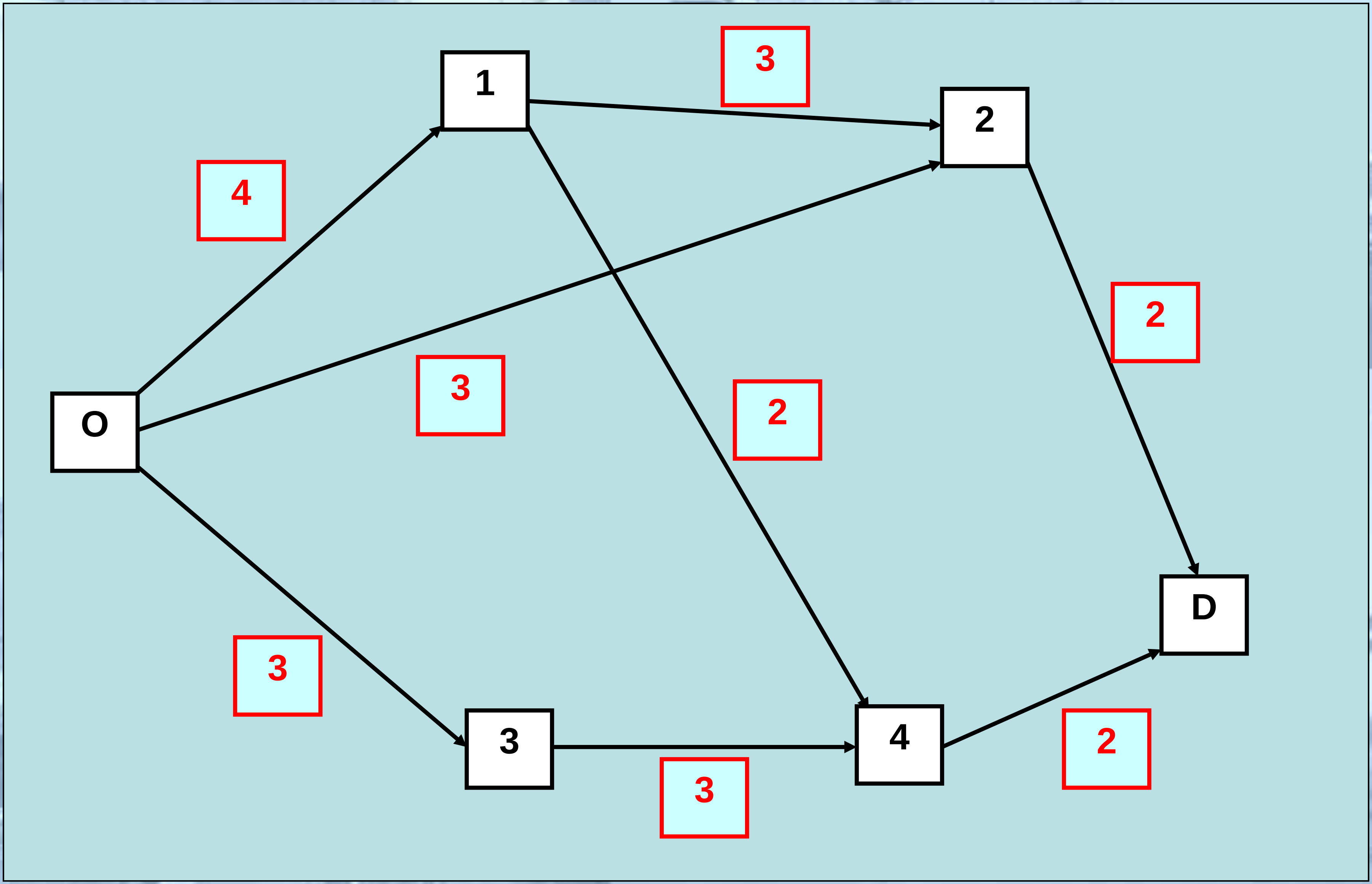
Ford/Moore

Floyd

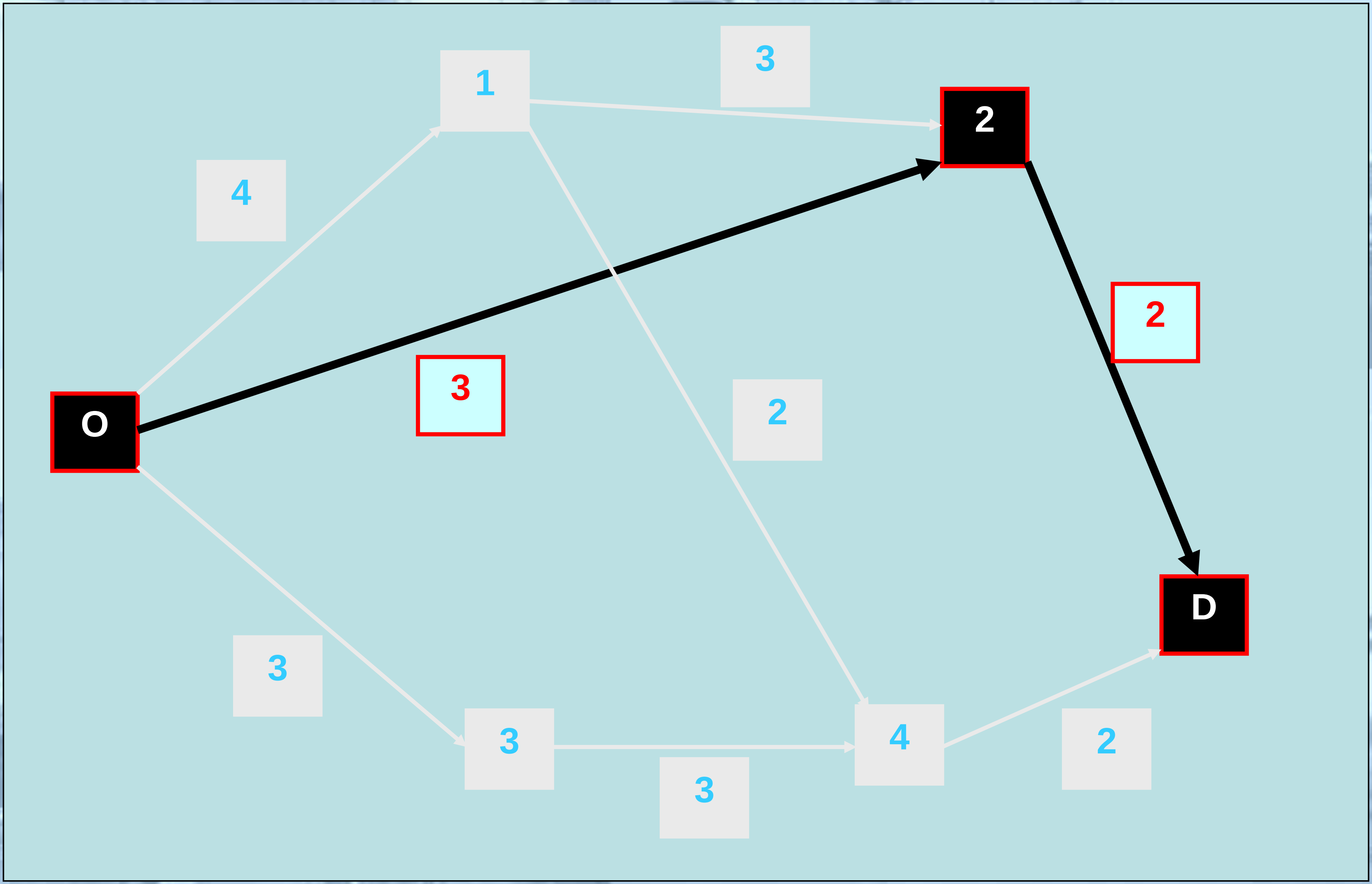
Dantzig

Double Sweep

REDES - Conceitos - Exemplo de Caminho Mínimo



REDES - Conceitos - Exemplo de Caminho Mínimo



REDES - Conceitos - Fluxo Máximo

Referem-se a situações em que se deseja avaliar a quantidade máxima de fluxo que pode ser enviada de um nó de origem a um nó de destino na rede.

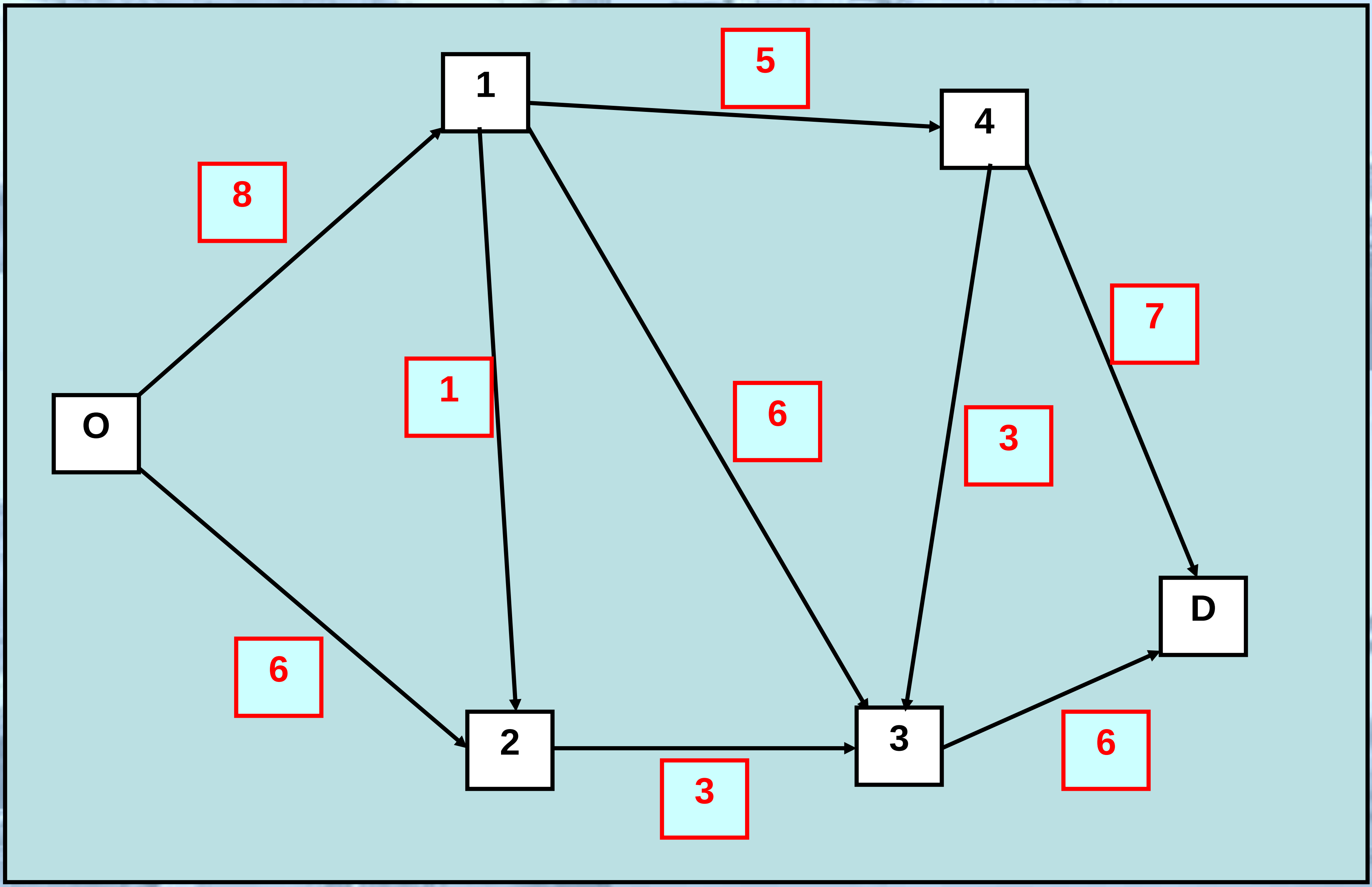
Principais Algoritmos utilizados para o cálculo:

Dinic

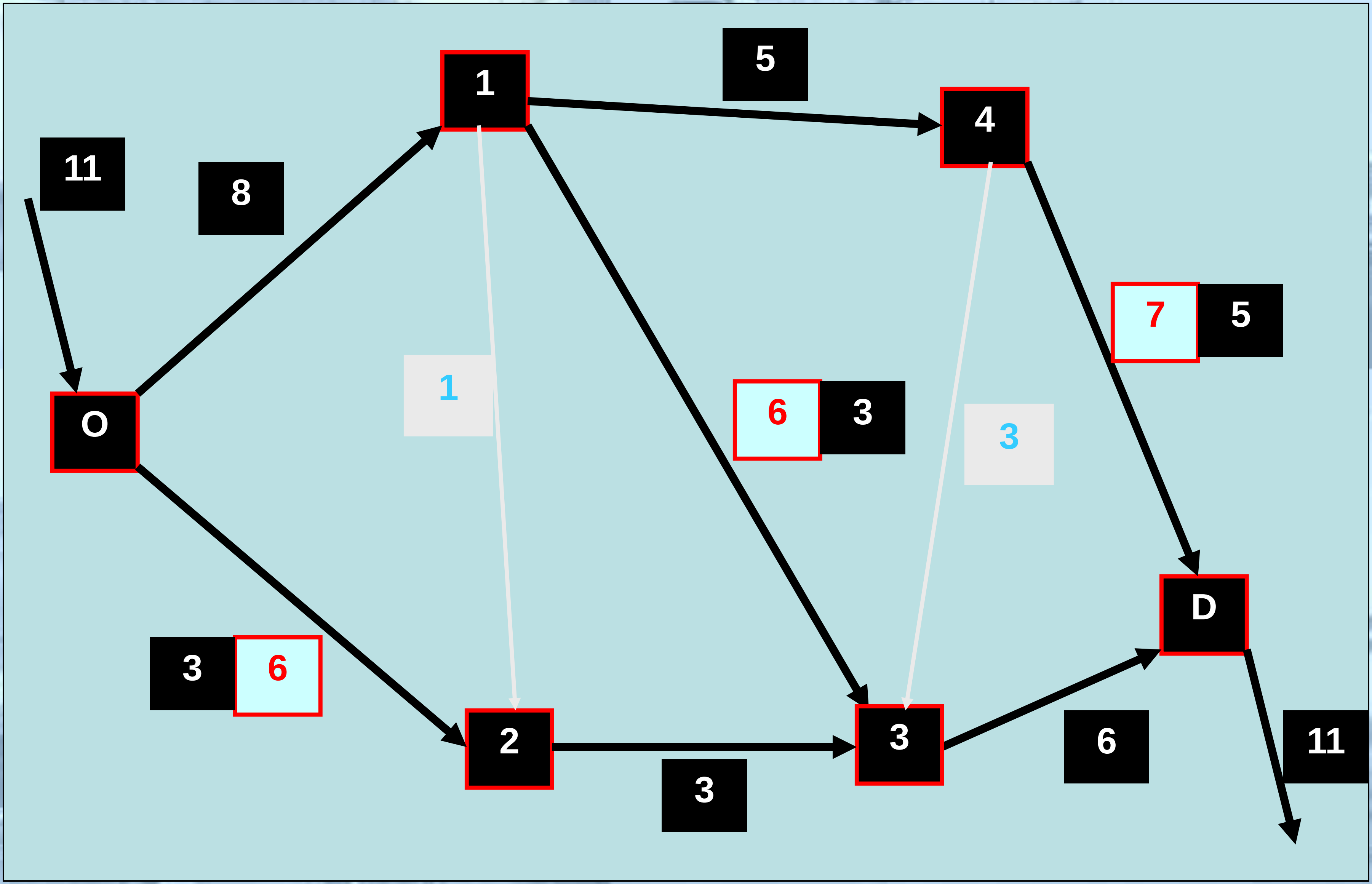
Ford/Fulkerson

Malhottra

REDES - Conceitos - Exemplo de Fluxo Máximo



REDES - Conceitos - Exemplo de Fluxo Máximo



REDES - Conceitos - Custo mínimo

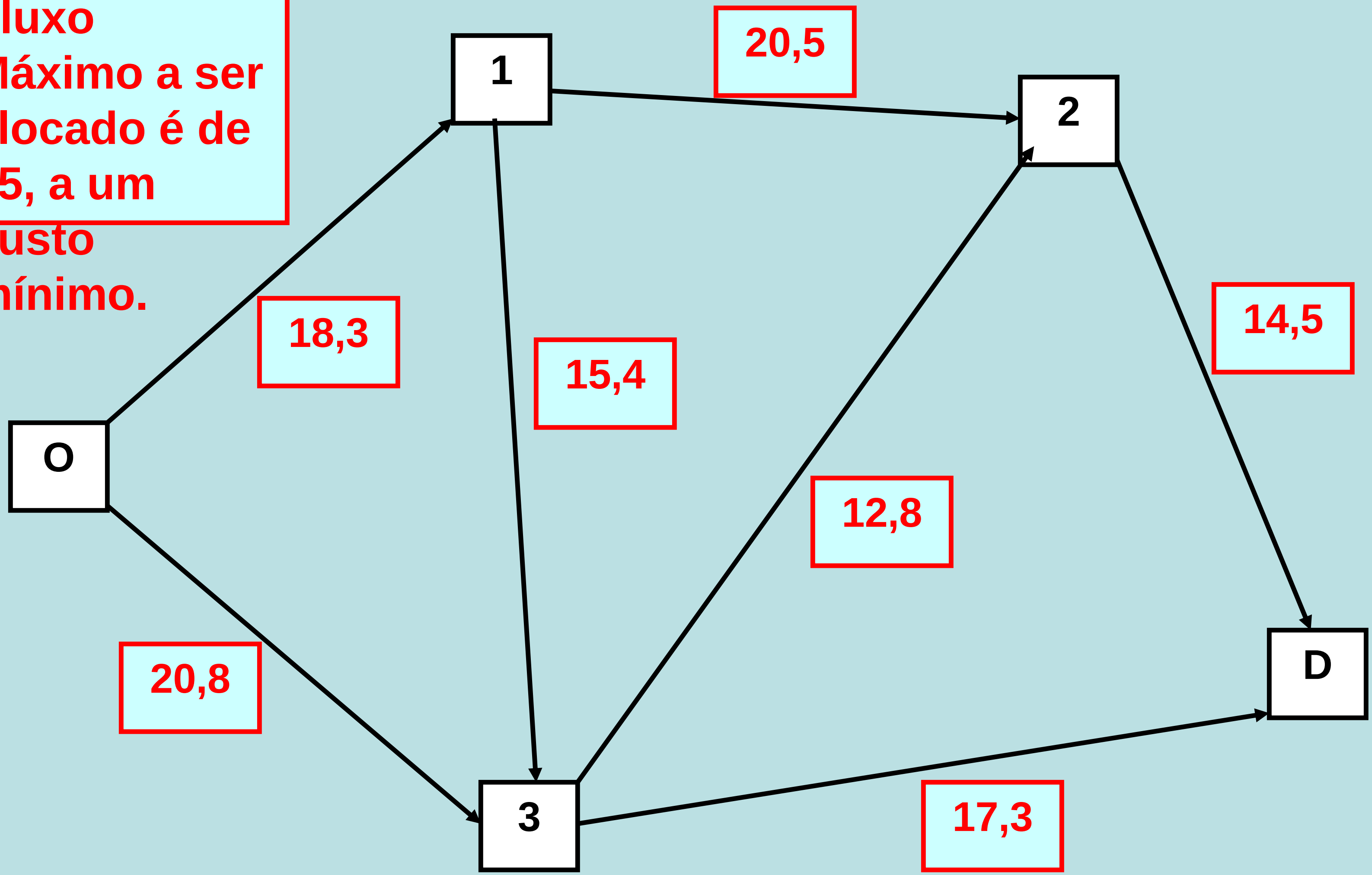
Visam determinar os caminhos entre um par de nós (O/D) pelos quais deve ser distribuído um determinado fluxo com menor custo possível.

Principais Algoritmos utilizados para o cálculo:

- **“Out of Kilter”**
- **Ford/Fulkerson**
- **Busacker e Gowen**

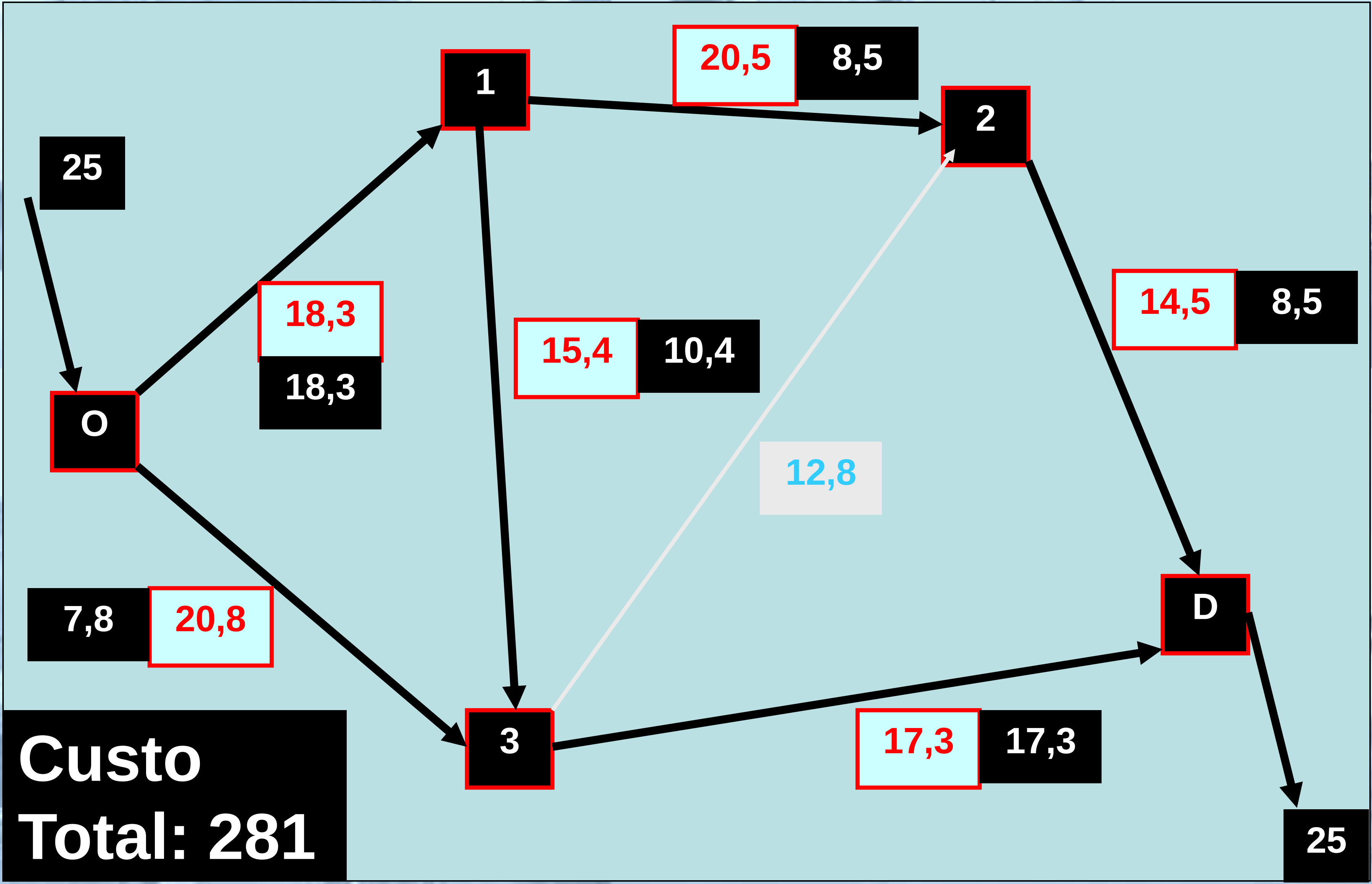
REDES - Conceitos - Exemplo de Fluxo Máximo

Fluxo Máximo a ser alocado é de 25, a um custo mínimo.



Ca,Cu: Capacidade,Custo

REDES - Conceitos - Exemplo de Fluxo Máximo



Custo Total: 281

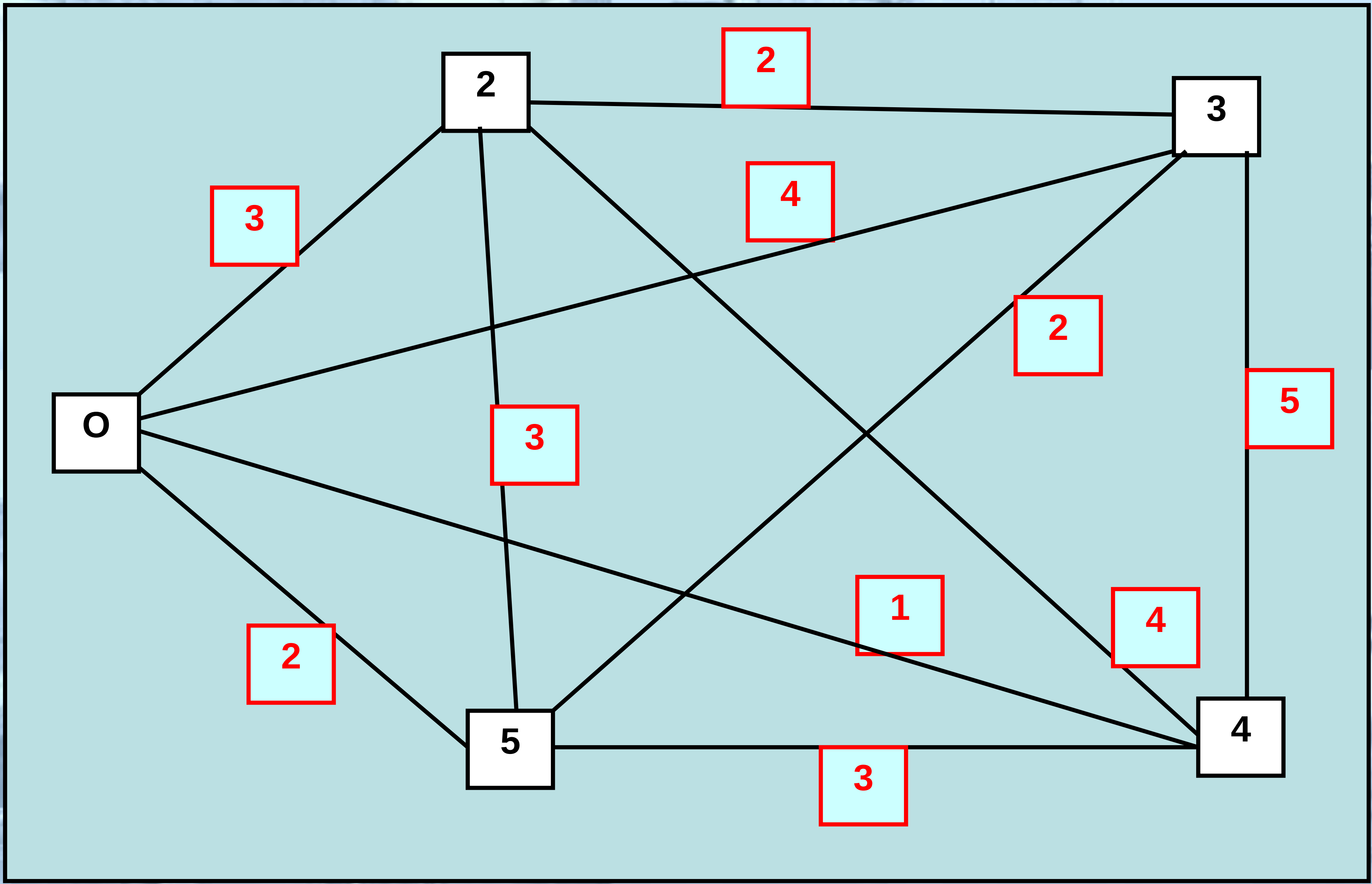
REDES - Conceitos - Roteamento

Visam determinar um ciclo fechado, utilizando a melhor rota.

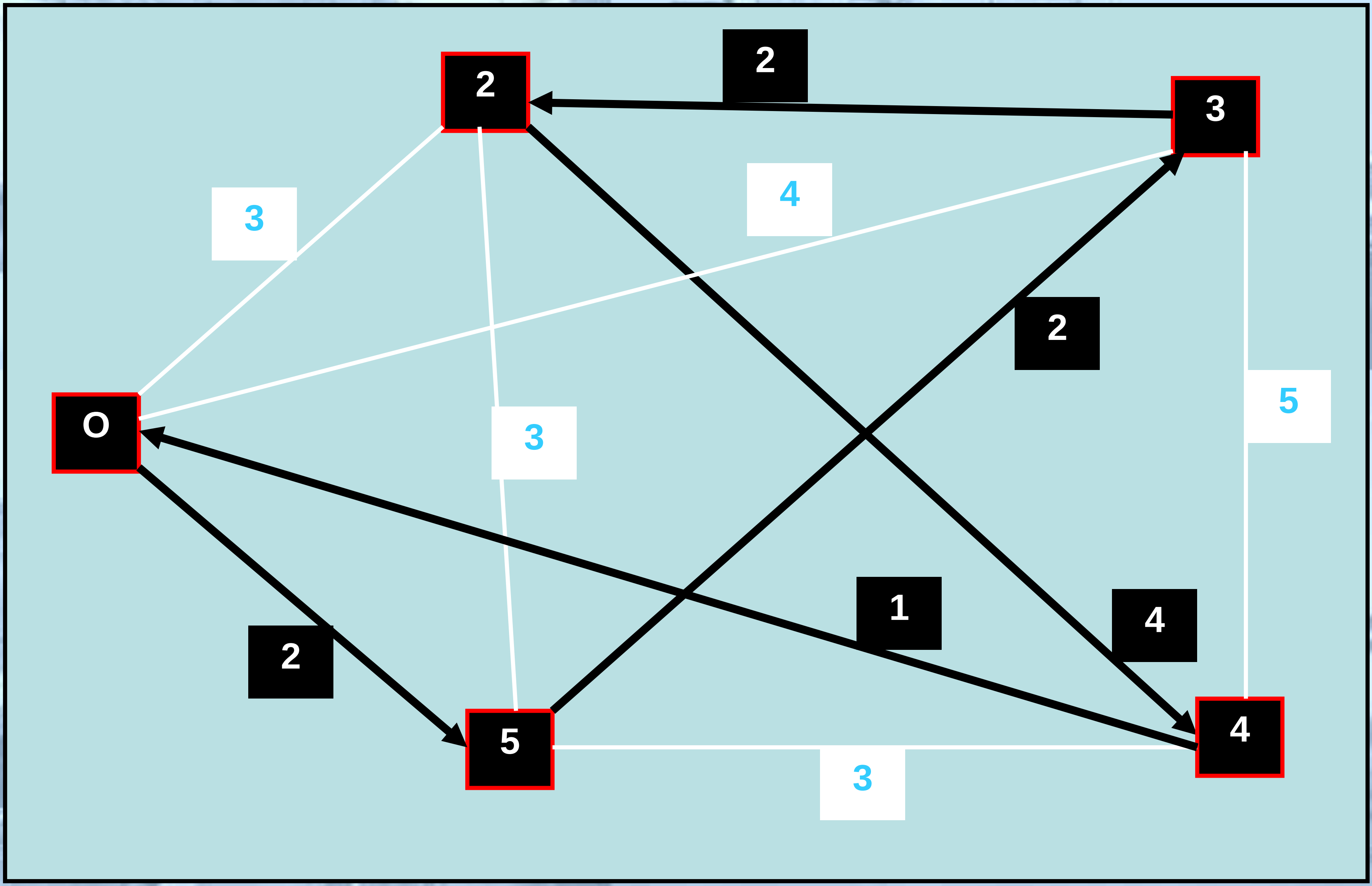
Principal Algoritmo utilizado para o cálculo:

Tour (Caixeiro Viajante)

REDES - Conceitos - Exemplo de Fluxo Máximo



REDES - Conceitos - Exemplo de Fluxo Máximo



Grafos e Redes

Está contida na área de Pesquisa Operacional. Pode ser considerada como uma teoria baseada na interligação de pontos e linhas, utilizada principalmente na solução de problemas de roteamento.

Um Grafo é definido como sendo um par ordenado (V,A). Os elementos de V são denominados vértices ou nós do grafo e os pares ordenados de A, denominados de arestas ou arcos do grafo.

Grafos e Redes

Alguns aspectos importantes devem ser considerados em relação aos Grafos:

√ Quando um arco é incidente a um único vértice é denominado "laço".

√ Dois vértices são considerados "adjacentes" se eles estão interligados por um arco.

√ Uma "cadeia" é uma seqüência de arcos (orientados ou não). O tamanho de uma cadeia está relacionada ao número de arcos que a compõe.

Grafos e Redes

√ Um "caminho" é uma cadeia em que todos os arcos têm a mesma direção (não confundir com sentido!).

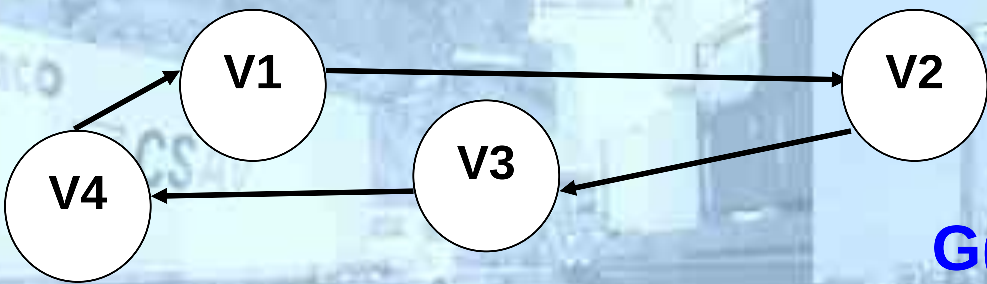
√ Um "ciclo" é uma cadeia cujo vértice inicial e final é o mesmo (cadeia fechada).

Quanto as características de seus arcos, um grafo pode ser:

√ Orientado ou não orientado: são orientados quando os seus arcos possuem uma orientação definida, e não orientados, quando não existe noção de direção. Quando os arcos não possuem direção são denominados arestas.

√ Valorado e não valorado: é valorado quando existem valores atribuídos a cada um dos seus arcos.

Grafos e Redes



G(V,A) sendo:

V={V1,V2,V3,V4} e

A={V1V2,V2V3,V3V4,V4V1}

Quando em um grafo existe a associação de um ou mais valores aos arcos e/ou nós, pode-se defini-lo como uma rede.

Pode-se representar uma rede como R={V,A,α}, onde V e A são, respectivamente, os conjuntos de nós e arcos que formam um grafo, e α, os parâmetros associados aos elementos do conjunto A e/ou do conjunto V.

Grafos e Redes

Podem-se citar alguns valores de α associados aos arcos:

✓ a capacidade de fluxo, que corresponde ao limite que pode passar pelo arco;
✓ o custo no arco, que pode ser considerado como um valor monetário, a distância percorrida ou o tempo de viagem no arco e
✓ o fluxo no arco.

Existem também os valores de α associados aos nós:
✓ população de uma cidade;
✓ número de produtos fabricados em uma unidade e
✓ demanda de produtos em uma área geográfica.

Otimização de Redes

Os problemas de otimização de redes podem ocorrer em várias áreas, mas geralmente são encontrados nas áreas de transportes e comunicações.

Um problema típico de transporte consiste em encontrar uma rota, partindo de uma origem para um destino, considerando que entre esses pontos existem diversas rotas alternativas e que necessita-se minimizar ou maximizar alguma medida associada aos arcos e/ou nós.

Otimização de Redes

Otimização de Redes

Minimização de Redes

Fluxo Máximo

<u>Otimização de Redes</u>

Os algoritmos de minimização de redes tratam da <u>árvore de valor mínimo</u> em problemas de interligação de redes não orientadas de comunicação, luz, água, esgoto, minerodutos, gasodutos etc., com o objetivo de atender todos os nós de uma rede, minimizando o consumo dos meios.

Otimização de Redes

O Algoritmo de PRIM compreende os seguintes passos:

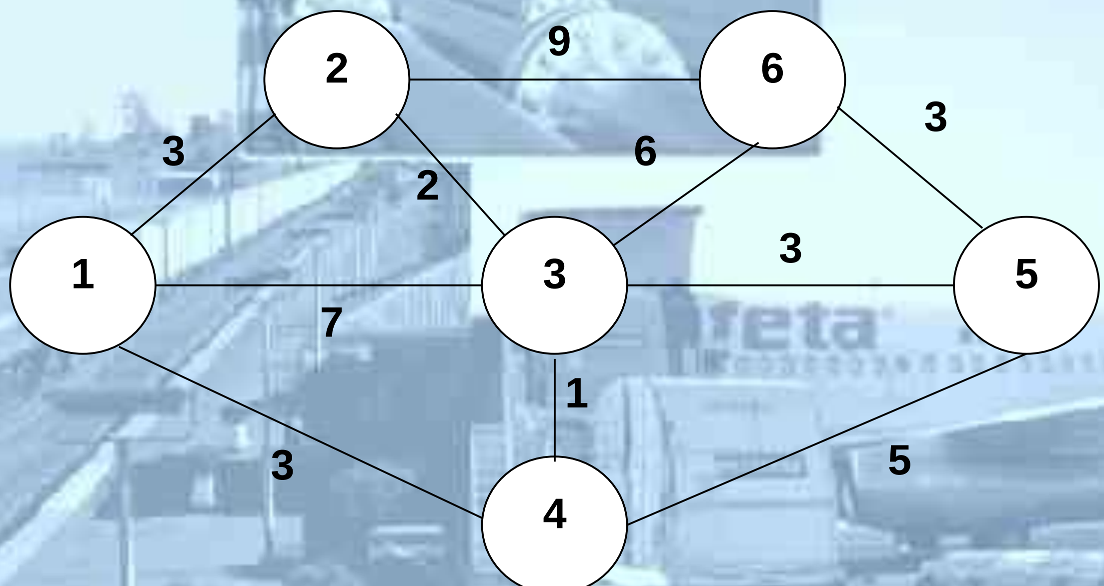
1º passo: selecionar qualquer nó da rede.

2º passo: identificar o nó do conjunto C*(nós não conectados) que está mais próximo de qualquer um dos nós do conjunto C (árvore mínima). Deve-se repetir este processo até que todos os nós estejam conectados (C* = ∅).

Otimização de Redes

Exemplo:

Considere o grafo a seguir e avalie quais as ligações que deverão ser implantadas visando a interligação de todos os nós, porém, considerando uma quilometragem total mínima. Os atributos dos arcos representam as distâncias entre as regiões.



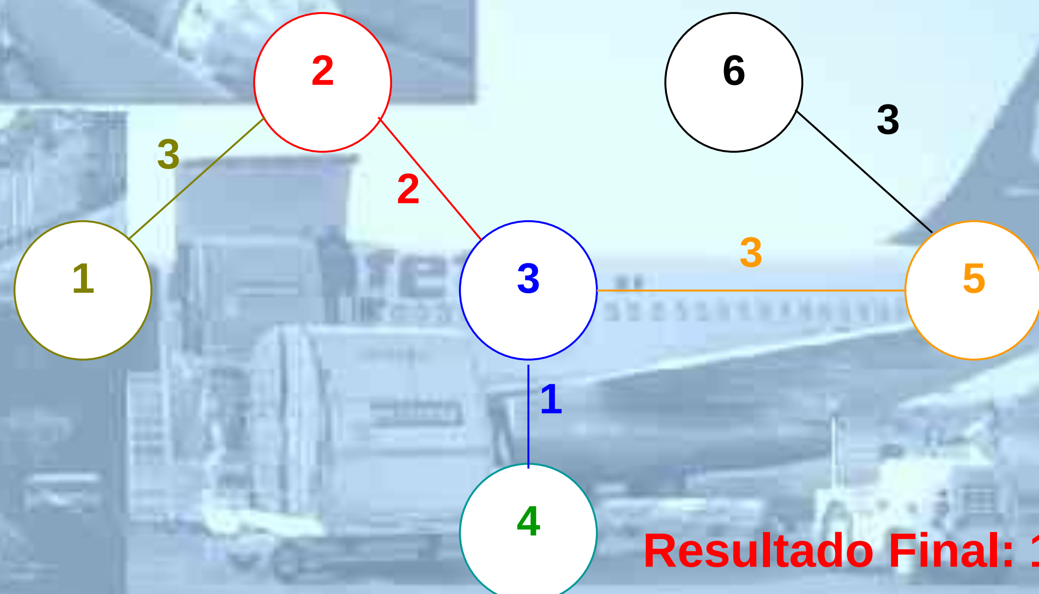
Otimização de Redes

Solução:

1ª iteração:	C1 = { 4 }	C*1 = { 1,2,3,5,6 }
2ª iteração:	C2 = { 4,3 }	C*2 = { 1,2,5,6 }
3ª iteração:	C3 = { 4,3,2 }	C*3 = { 1,5,6 }
4ª iteração:	C4 = { 4,3,2,1 }	C*4 = { 5,6 }
5ª iteração:	C5 = { 4,3,2,1,5 }	C*5 = { 6 }
6ª iteração:	C6 = { 4,3,2,1,5,6 }	C*6 = ∅

1º passo: selecionar qualquer nó da rede e o inserir no conjunto C (árvore mínima). O conjunto C* é formado pelos nós não conectados.

2º passo: identificar o nó do conjunto C* que está mais próximo de qualquer um dos nós do conjunto C. Deve-se repetir este processo até que todos os nós estejam conectados (C* = ∅).



Resultado Final: 12Km

Otimização de Redes

Algoritmo de Kruskal

Deve-se construir uma árvore, selecionando-se arcos, iniciando-se pelo arco de menor atributo, adicionando-os em ordem crescente de atributos, de modo a não formar ciclos com os arcos já selecionados. O "ponto de parada" do algoritmo é identificado quando a árvore possuir n-1 arcos conectados, sendo "n" o número de nós do grafo.

Otimização de Redes

Este algoritmo compreende os seguintes passos:

1º passo: colocar os arcos em ordem crescente de atributo. Estes arcos fazem parte de um conjunto "A*" de arcos não conectados. Inicialmente A, o conjunto de arcos conectados, é vazio, ou seja, A=∅.

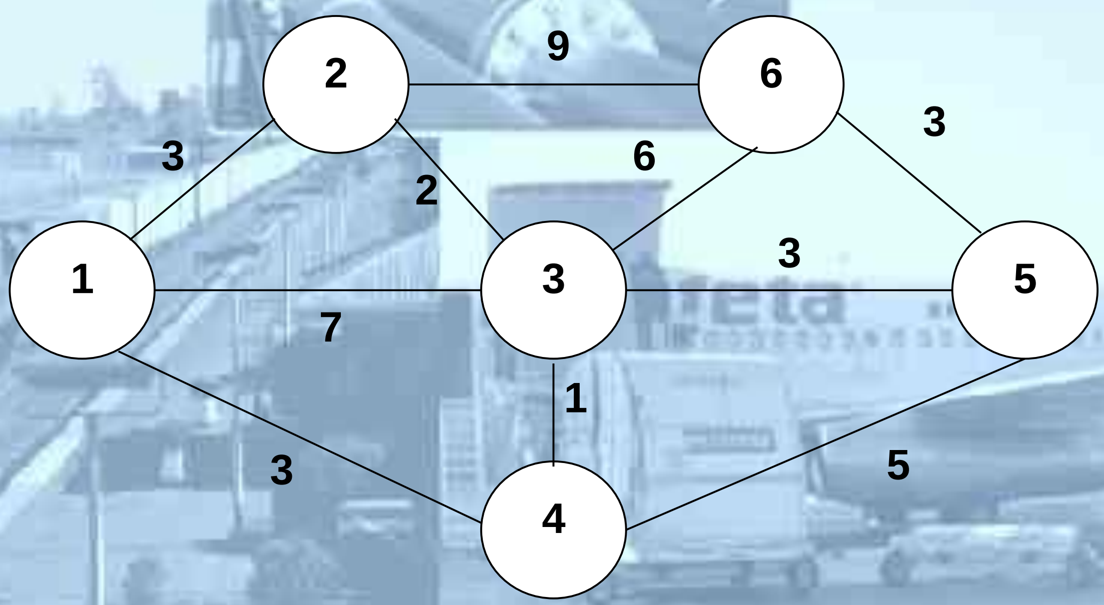
2º passo: selecionar o menor dos arcos de A* que não forme um ciclo com os demais e coloque-o no conjunto A. Um arco forma um ciclo quando os vértices deste arco já fazem parte da árvore mínima em construção.

3º passo: se A possui n-1 arcos, sendo "n" o número de nós, deve-se parar o algoritmo, pois os arcos de A compõem a árvore mínima. Caso contrário voltar para o passo 2.

Otimização de Redes

Exemplo:

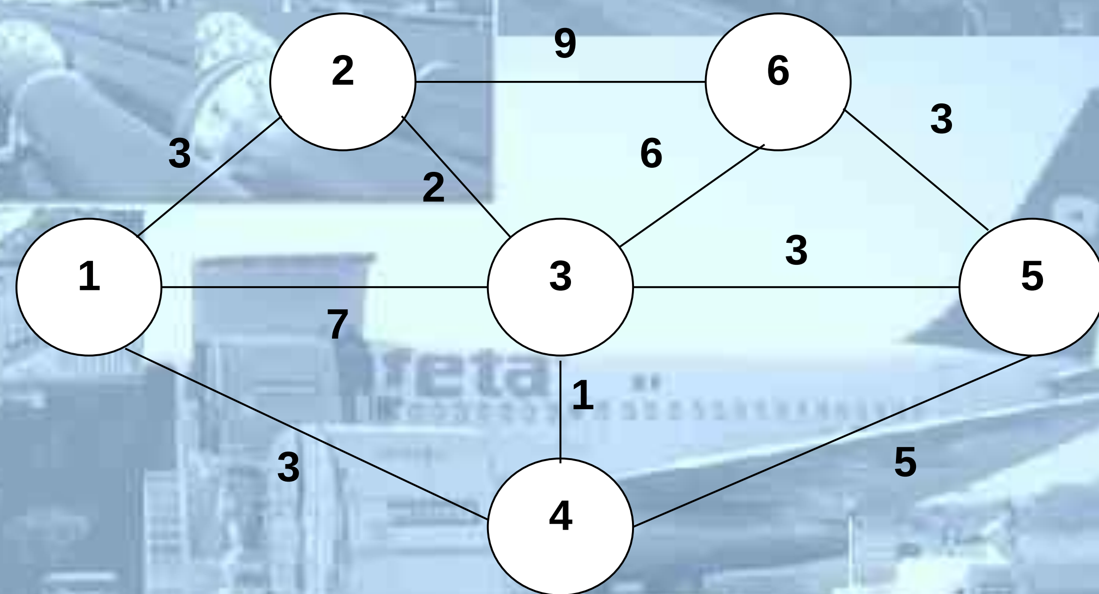
Considere o grafo a seguir e avalie quais as ligações que deverão ser implantadas visando a interligação de todos os nós, porém, considerando uma quilometragem total mínima. Os atributos dos arcos representam as distâncias entre as regiões.



Otimização de Redes

Solução:

Passo 1: A* = {(3,4),(3,2),(1,2),(3,5),(6,5),(1,4),(4,5),(3,6),(3,1),(2,6)}
A = ∅



1º passo: colocar os arcos em ordem crescente de atributo, formando o conjunto A* de arcos não conectados. Conjunto A de arcos conectados, é vazio, ou seja, A=∅.

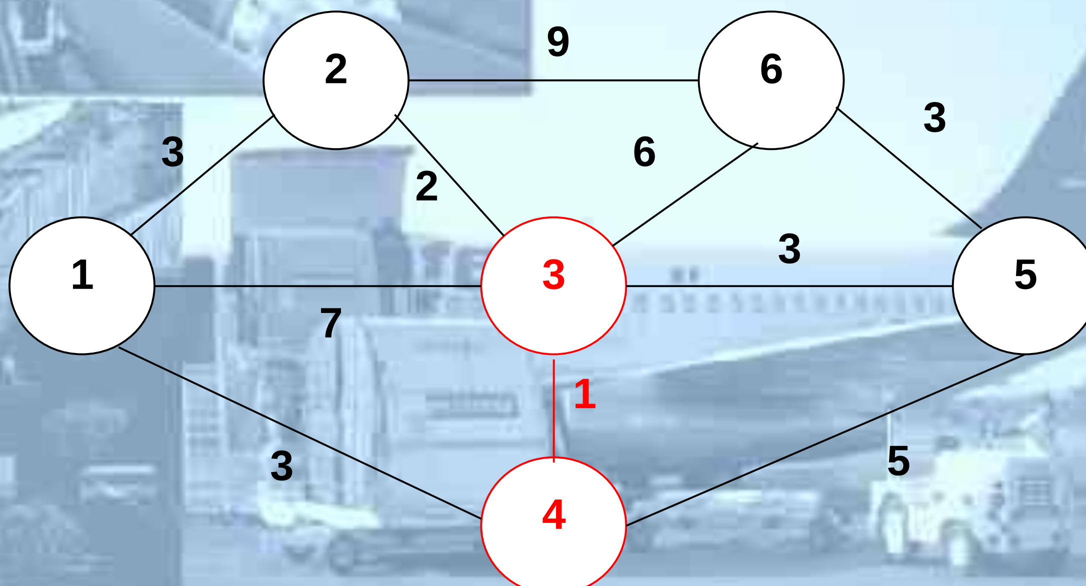
Otimização de Redes

Solução:

Passo 1: A* = {(3,4),(3,2),(1,2),(3,5),(6,5),(1,4),(4,5),(3,6),(3,1),(2,6)}

Passo 2: A = {(3,4)}
A* = {(3,2),(1,2),(3,5),(6,5),(1,4),(4,5),(3,6),(3,1),(2,6)}

2º passo: selecionar o **menor dos arcos** de **A*** que não forme um ciclo com os demais e coloque-o no conjunto **A**.



Otimização de Redes

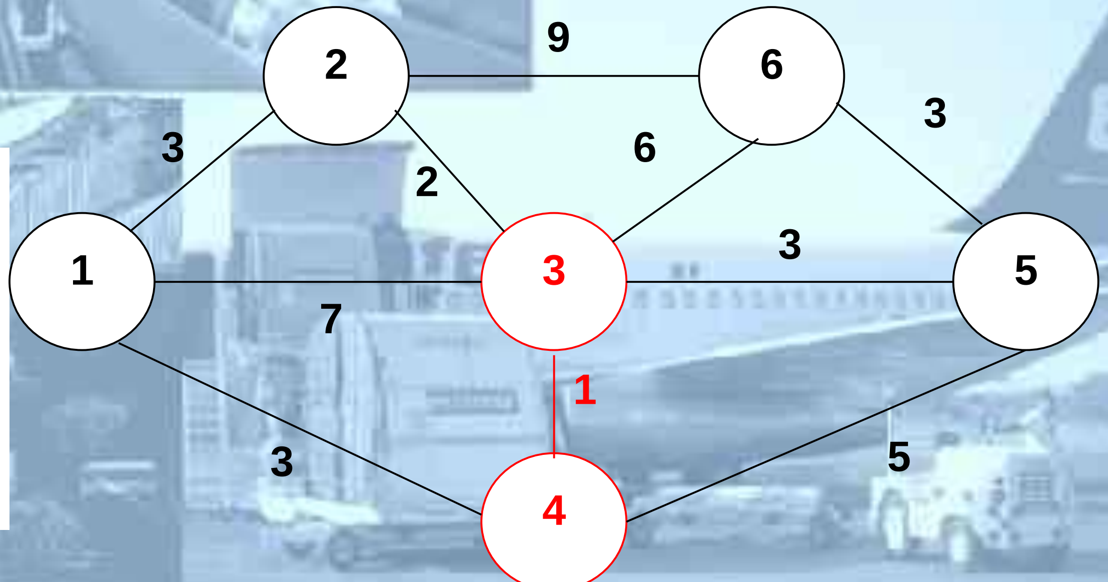
Solução:

Passo 1: A* = {(3,4),(3,2),(1,2),(3,5),(6,5),(1,4),(4,5),(3,6),(3,1),(2,6)}

Passo 2: A = {(3,4)}
A* = {(3,2),(1,2),(3,5),(6,5),(1,4),(4,5),(3,6),(3,1),(2,6)}

Passo 3: n = 6 e n-1 = 5
O número de elementos de A é igual a 1, e como n(A) < 5, deve-se retornar ao passo 2.

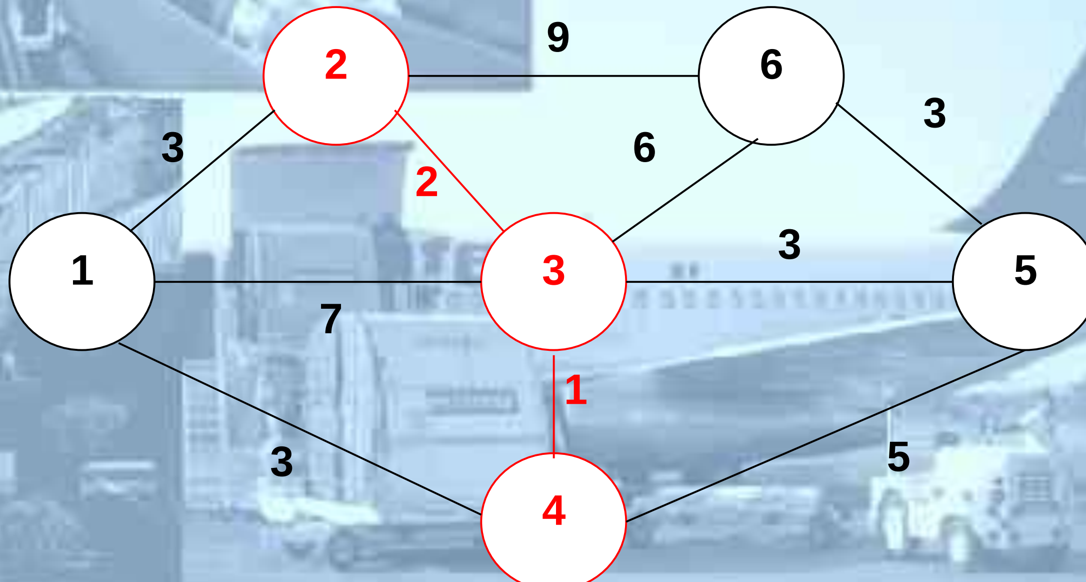
3º passo: se A possui n-1 arcos, sendo "n" o número de nós, deve-se parar o algoritmo, pois os arcos de A compõem a árvore mínima. <u>Caso contrário voltar para o passo 2</u>.



Otimização de Redes

Passo 2: A = {(3,4), (3,2)}
A* = {(1,2),(3,5),(6,5),(1,4),(4,5),(3,6),(3,1),(2,6)}

Passo 3: n = 6 e n-1 = 5
O número de elementos de A é igual a 2, e como n(A) < 5, deve-se **retornar ao passo 2**.



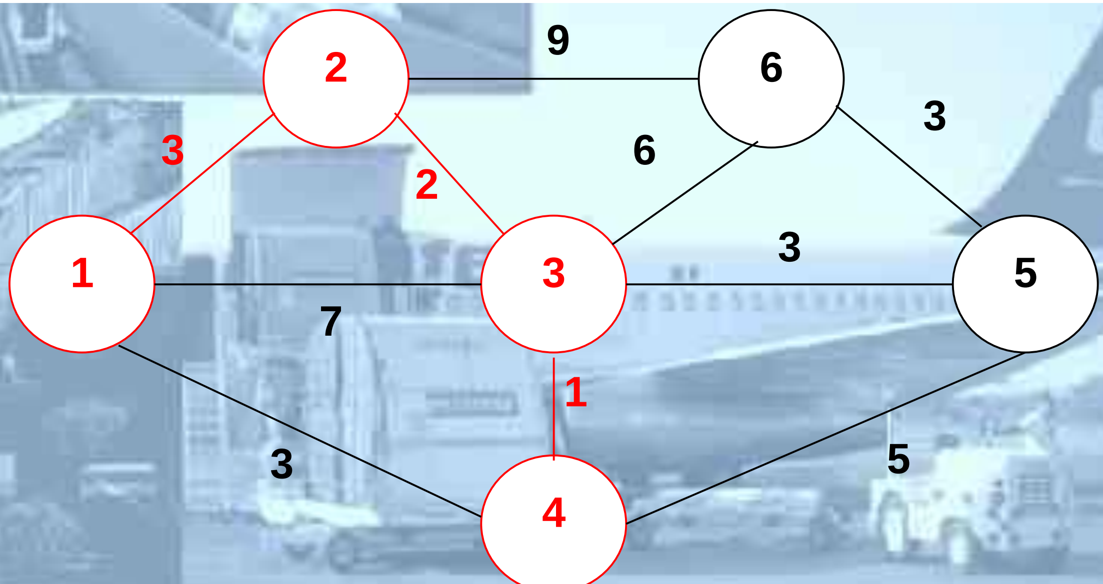
Otimização de Redes

Passo 2: A = {(3,4), (3,2)}
A* = {(1,2),(3,5),(6,5),(1,4),(4,5),(3,6),(3,1),(2,6)}

Passo 3: n = 6 e n-1 = 5
O número de elementos de A é igual a 2, e como n(A) < 5, deve-se retornar ao passo 2.

Passo 2: A = {(3,4), (3,2), (1,2)}
A* = {(3,5),(6,5),(1,4),(4,5),(3,6),(3,1),(2,6)}

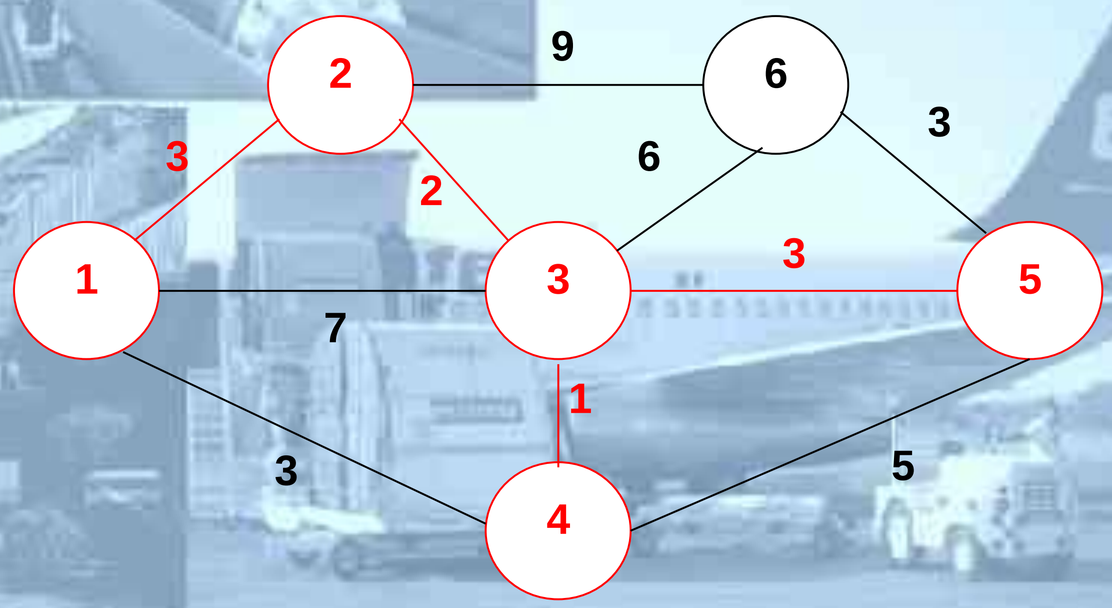
Passo 3: n = 6 e n-1 = 5
O número de elementos de A é igual a 3, e como n(A) < 5, deve-se retornar ao passo 2.



Otimização de Redes

Passo 2: A = {(3,4), (3,2), (1,2), (3,5)}
A* = {(6,5),(1,4),(4,5),(3,6),(3,1),(2,6)}

Passo 3: n = 6 e n-1 = 5
O número de elementos de A é igual a 4, e como n(A) < 5, deve-se retornar ao passo 2.



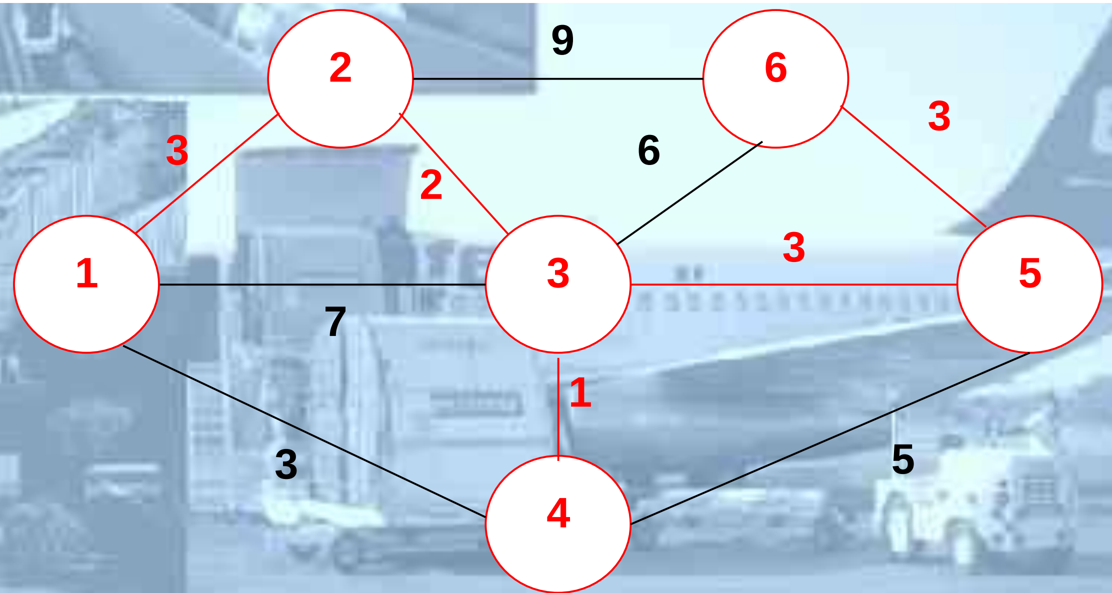
Otimização de Redes

Passo 2: A = {(3,4), (3,2), (1,2), (3,5)}
A* = {(6,5),(1,4),(4,5),(3,6),(3,1),(2,6)}

Passo 3: n = 6 e n-1 = 5
O número de elementos de A é igual a 4, e como n(A) < 5, deve-se retornar ao passo 2.

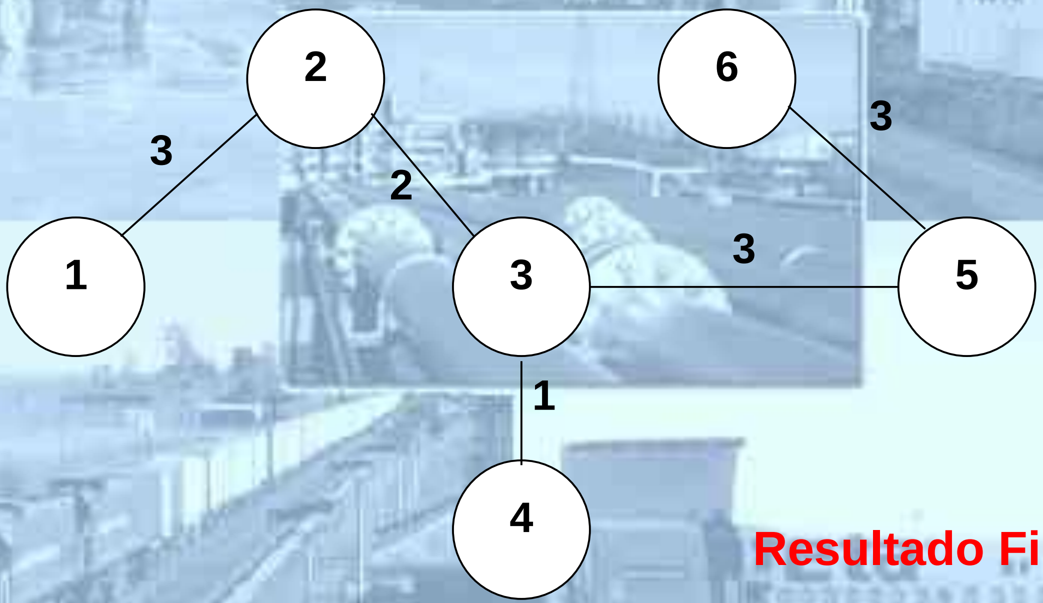
Passo 2: A = {(3,4), (3,2), (1,2), (3,5), (6,5)}
A* = {(1,4),(4,5),(3,6),(3,1),(2,6)}

Passo 3: n = 6 e n-1 = 5
O número de elementos de A é igual a 5, e como n(A) = 5, deve-se parar o processo de análise.



Otimização de Redes

Árvore Mínima



Resultado Final: 12Km

Otimização de Redes

Análise do Fluxo Máximo de uma Rede
(Método Ford-Fulkerson)

Deve-se examinar um grafo orientado como uma Rede de Fluxo, usando-a para analisar o fluxo de materiais a partir de uma origem, onde o material é produzido ou retirado, até um destino, onde o material é consumido ou depositado.

A origem produz o material a uma taxa fixa, e o depósito consome o material na mesma taxa.

O fluxo do material em qualquer ponto no sistema é intuitivamente a taxa na qual o material se move.

Otimização de Redes

Cada aresta orientada pode ser imaginada como um canal, com uma capacidade estabelecida, com uma taxa máxima na qual o material pode fluir pelo canal.

Os vértices são junções de canais, onde o material flui sem acumulação, isto é, com exceção da origem e do destino, a taxa de entrada e de saída de material no vértice deve ser a mesma.

Chamamos essa propriedade de "conservação do fluxo".

Otimização de Redes

Deseja-se então calcular a maior taxa na qual o material pode ser enviado da origem até o destino, sem violar as capacidades máximas das arestas e mantendo a propriedade de conservação de fluxo.

Numa rede de fluxo tem-se dois vértices especiais, uma origem (O) e um destino (D), e para todo vértice do grafo existe um caminho a partir de “O” passando por “V” que chega em “D”.

Otimização de Redes

O método de Ford-Fulkerson objetiva encontrar um fluxo máximo para uma rede de fluxos.
É um método é iterativo, começando com $f(u,v) = 0$.

Este método é composto pelos seguintes passos:

1º passo: iniciar o fluxo f total com 0 e verificar a existência de caminhos de fluxo > 0.

2º passo: Escolher um caminho da origem até o destino com fluxo >0; identificar o fluxo mínimo entre os fluxos presentes nos arcos (u,v) pertencentes ao caminho escolhido e para todas as aresta pertencentes ao caminho escolhido fazer:

$f(u,v) = f(u,v) – f$ (decrementa o fluxo disponível)

$f(v,u) = f(v,u) + f$ (incrementa o fluxo utilizado)

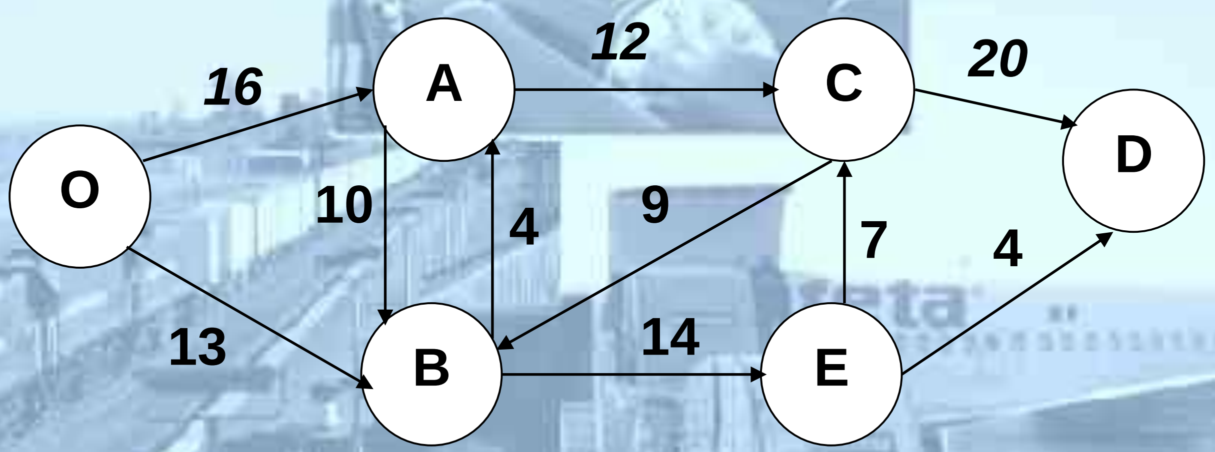
3º passo: Faz-se $ftotal = ftotal + f$. O processo deve ser repetido até que todos os caminhos sejam analisados e enquanto existirem fluxos disponíveis.

Otimização de Redes

Exemplo:

Baseando-se no grafo a seguir, identifique o fluxo máximo que pode fluir entre a origem (O) e o destino (D), utilizando o método de Ford-Fulkerson.

1º passo: **ftotal = 0**



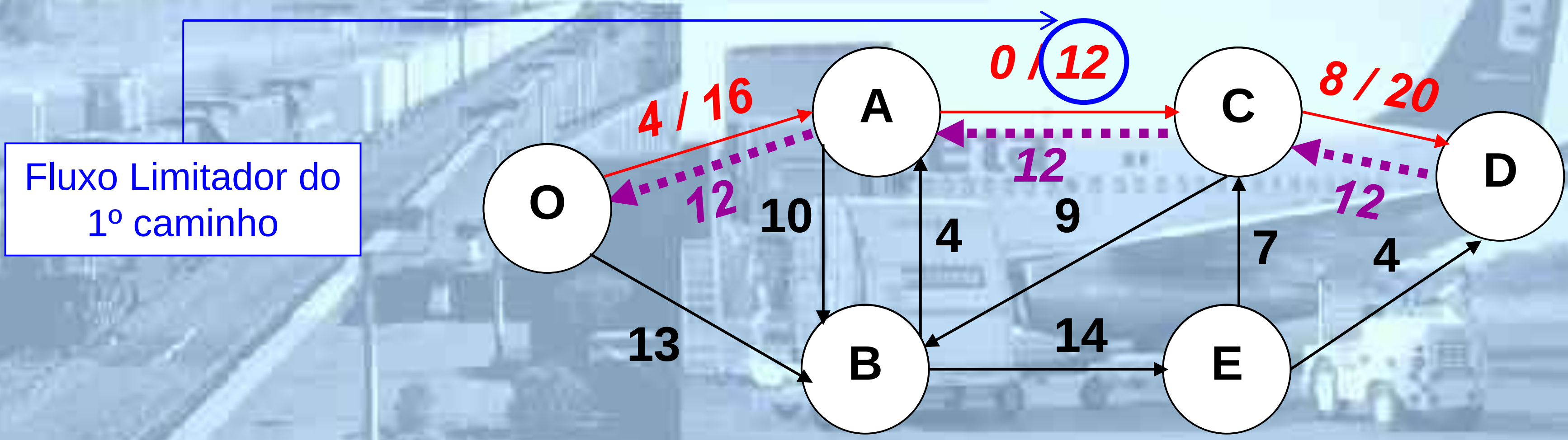
Otimização de Redes

2º passo: 1º caminho escolhido: O>16>A>12>C>20>D, sendo f=12

3º passo: ftotal=12 Existem fluxos disponíveis? SIM – Ir para 2º P.

f(u,v) = f(u,v) – f (decrementa o fluxo disponível)
f(v,u) = f(v,u) + f (incrementa o fluxo utilizado)

f(u,v) = f(O,A)	f(u,v) = f(u,v) – f = 16 – 12 = 4
f(v,u) = f(A,O)	f(v,u) = f(v,u) + f = 0 + 12 = 12



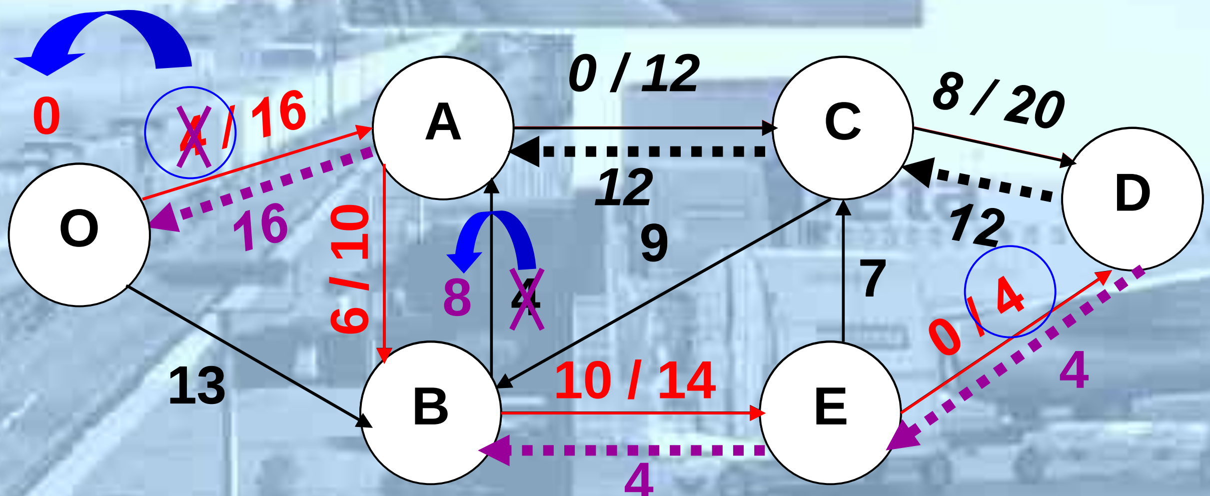
Otimização de Redes

2º passo: 2º caminho escolhido: O>4>A>10>B>14>E>4>D, sendo f=4

3º passo: ftotal=16 Existem fluxos disponíveis? SIM – Ir para 2º P.

f(u,v) = f(u,v) – f (decrementa o fluxo disponível)
f(v,u) = f(v,u) + f (incrementa o fluxo utilizado)

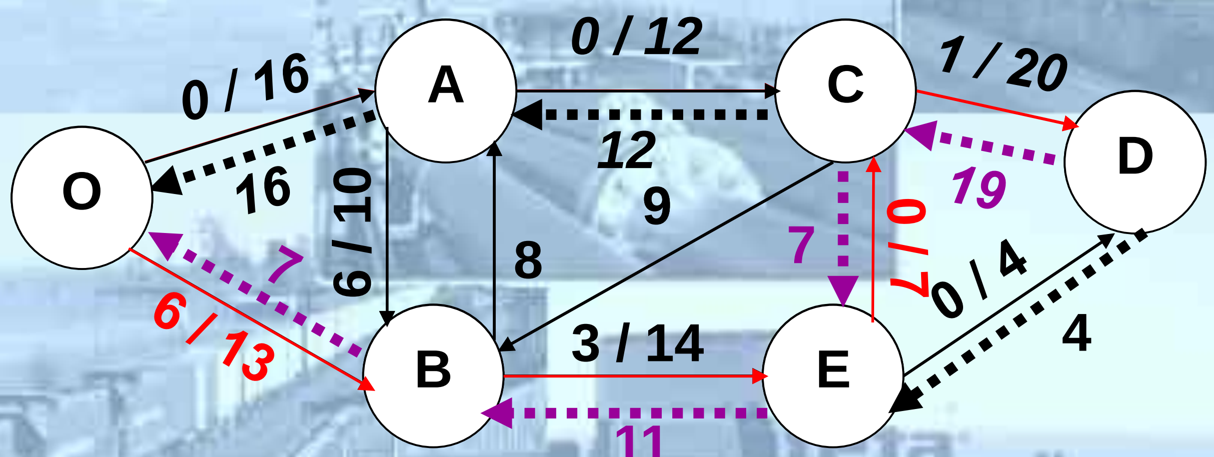
f(u,v) = f(O,A)	f(u,v) = f(u,v) – f = 4 – 4 = 0
f(v,u) = f(A,O)	f(v,u) = f(v,u) + f = 12 + 4 = 16



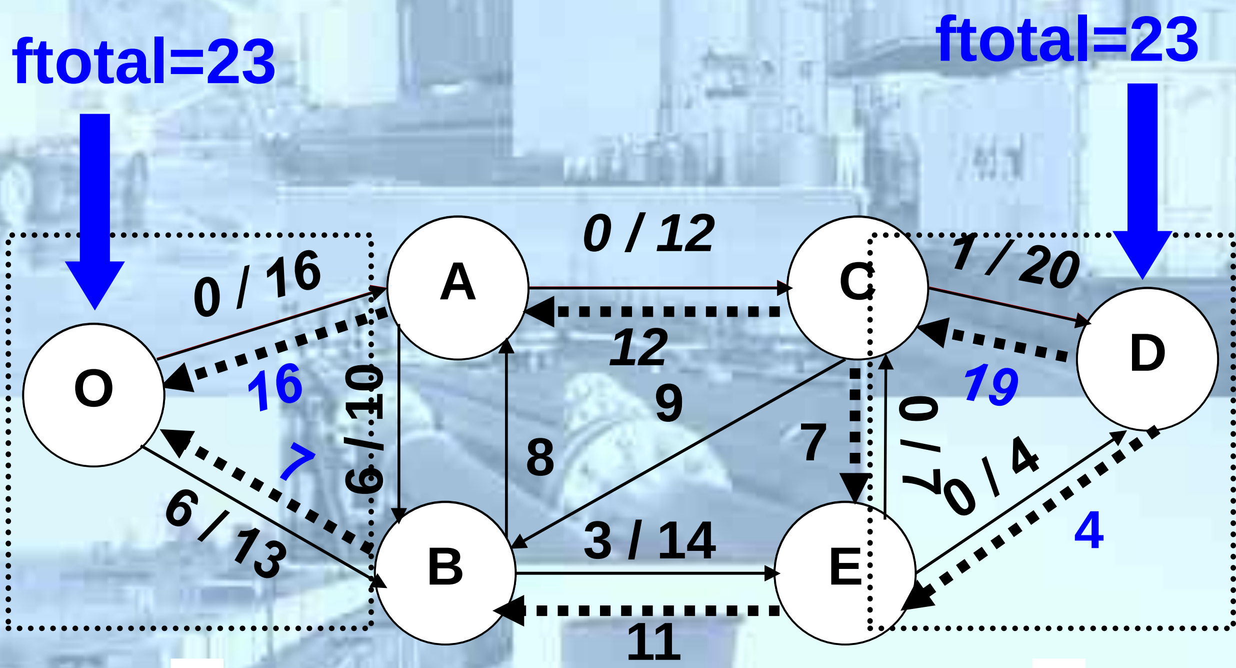
Otimização de Redes

2º passo: **3º caminho escolhido: O>13>B>10>E>7>C>8>D, sendo f=7**

3º passo: **ftotal=23 Existem fluxos disponíveis? NÃO – Parar!**



Otimização de Redes



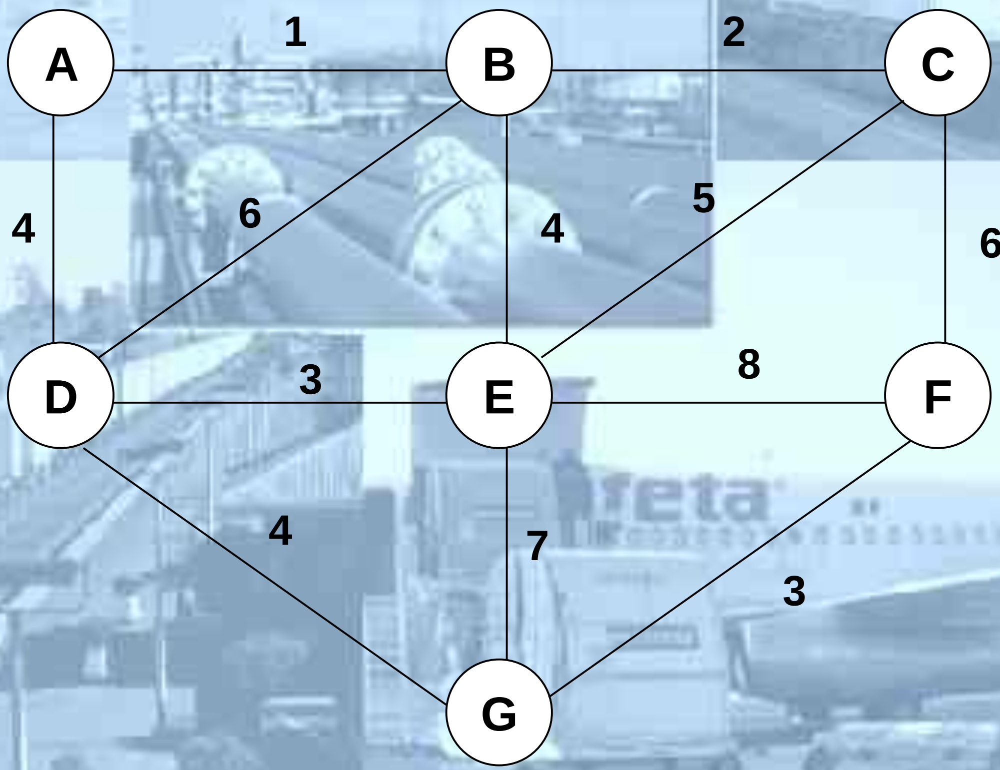
16 + 7 = 23

19 + 4 = 23

Otimização de Redes

Exercícios: Encontre uma árvore mínima, otimizando os custos, utilizando os algoritmos de PRIM e Kruskal.

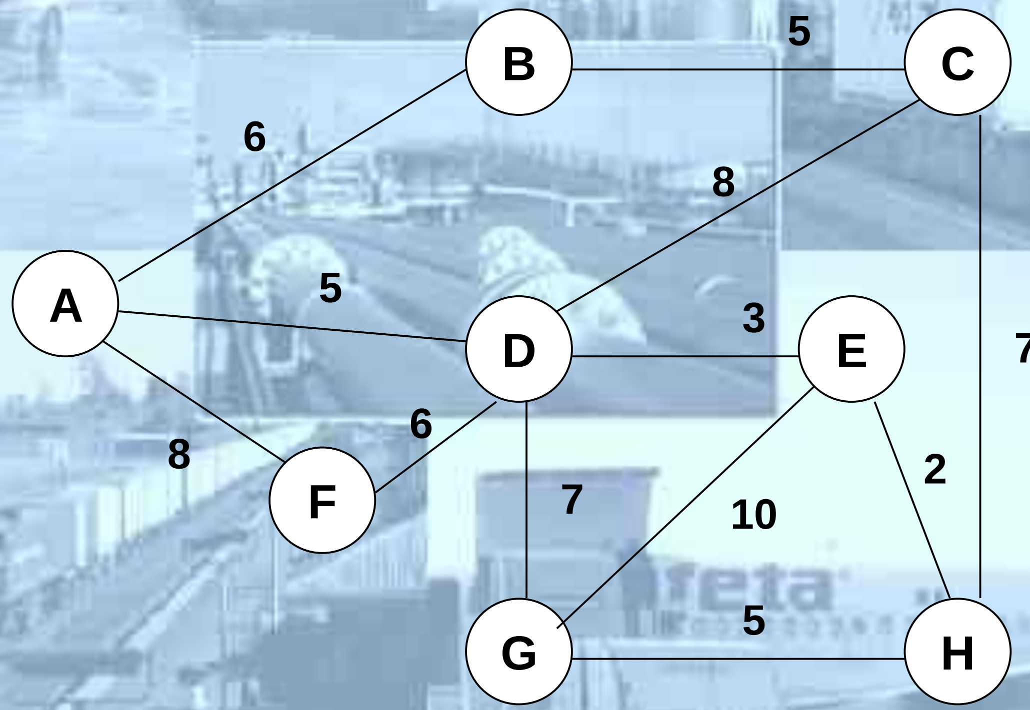
1)



17Km

Otimização de Redes

2)

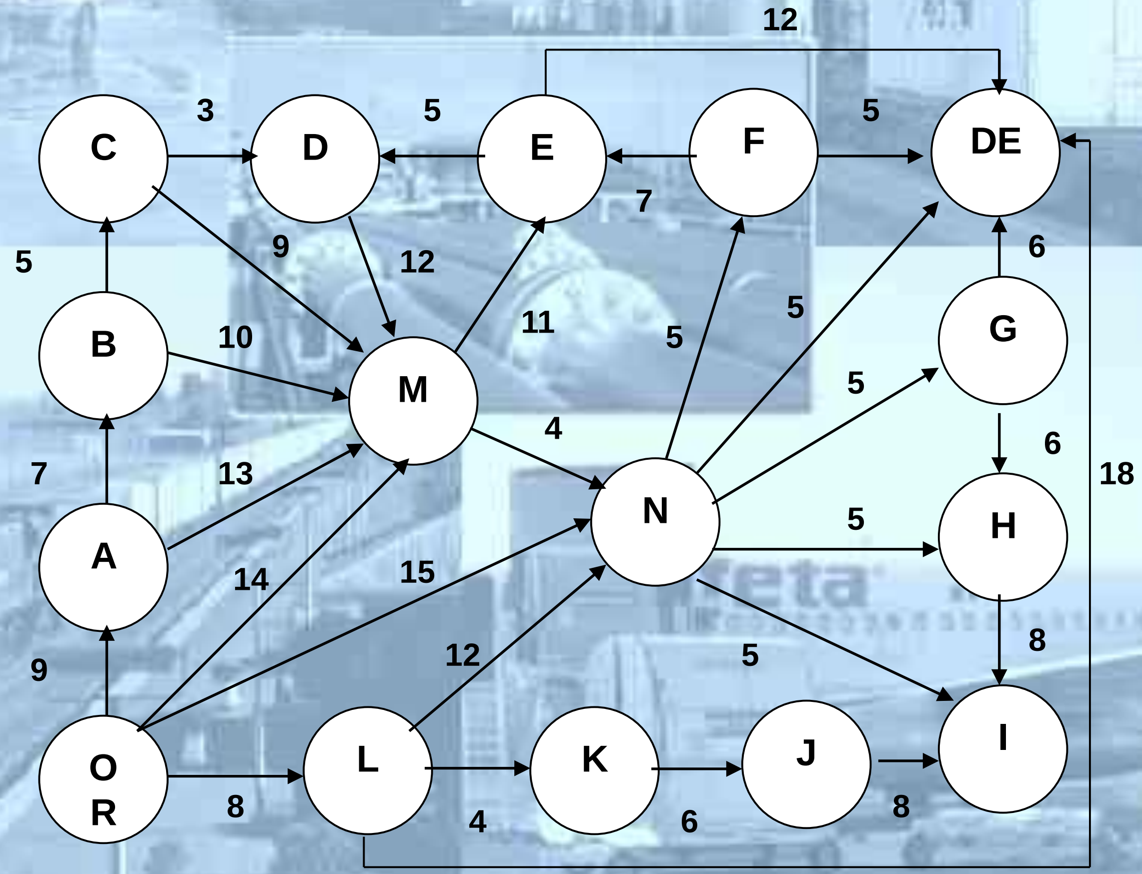


32Km

Otimização de Redes

Exercício:

Identifique o fluxo máximo que pode fluir entre a origem (OR) e o destino (DE), utilizando o método de Ford-Fulkerson.



Ftotal = 34Km